

A rendre pour le Mercredi 27 Mars 2019

Exercice 1

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. (a) La fonction $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

La fonction F est donc définie sur \mathbb{R} .

De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t^2} > 0$$

donc

F est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$.

(b) Tout d'abord, le domaine de définition de F est bien symétrique. On étudie

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2}$$

On pose le changement de variable $u = -t$ ($du = -dt$), on a alors

$$F(-x) = \int_0^x \frac{-du}{1+(-u)^2} = - \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = -F(x).$$

La fonction F est impaire.

(c) La fonction $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

La fonction F est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

La fonction F est strictement croissante.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2} &\iff \frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{(1+t)^2 - 2 - 2t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{1+2t+t^2-2-2t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{-1+2t-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{-(1-t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vérifiée (et comme on a raisonné par équivalence, on a)

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}}$$

D'après l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2} &\implies \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{2}{(1+t)^2} dt \\ &\implies F(x) \leq \left[\frac{-2}{1+t} \right]_0^x \\ &\implies F(x) \leq \frac{-2}{1+x} - (-2) \\ &\implies F(x) \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) \leq 2.}$$

(b) La fonction F est strictement croissante et elle est majorée par 2.

$$\boxed{\text{Elle admet donc une limite finie } L \text{ en } +\infty \text{ et } L \leq 2.}$$

3. De la même façon

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} &= \frac{(1+t)^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} \\ &= \frac{1+2t+t^2-1-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} \\ &= \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{(1+t)^2} &\implies \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \\ F(x) &\geq \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^x \\ F(x) &\geq \frac{-1}{1+x} - (-1) \\ F(x) &\geq 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)$$

c'est à dire,

$$\boxed{L := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq 1.}$$

4. On sait que

- La fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ (elle est de classe \mathcal{C}^1)
- La fonction F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq 1$.

Donc, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{L'équation } F(x) = \frac{1}{2} \text{ admet une et une seule solution sur } [0, +\infty[.}$$

5. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) On sait que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composée de fonctions dérivables

$$\boxed{G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$$

On a alors

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = 0}$$

(b) La dérivée de G est nulle sur \mathbb{R}_+^* . La fonction G est donc constante. Par exemple en choisissant $x = 1$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = G(1) = 2F(1)}$$

(c) On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 2F(1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = 0$. Ainsi

$$\boxed{L = 2F(1)}$$

Exercice 2

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{Donc } u_1 = \ln(2)}$$

2. On a pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x^{n-1} > 0 &\implies \frac{x^{n-1}}{1+x} > 0 \\ &\implies \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour } n \in \mathbb{N}^*, u_n \text{ est positive.}}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} dx \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^{n-1} > 0$, $1 + x > 0$ et $x - 1 < 0$. Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

La suite (u_n) est décroissante.

4. Pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} dx \\ &= \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n} - 0. \end{aligned}$$

D'où la relation $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$.

5. On a donc la relation suivante $u_{n+1} = \frac{1}{n} - u_n$

```
n = input("Donnez un entier n")
u = log(2)
for k = 1:n-1
    u = 1/k - u
end
dips(u)
```

6. La suite (u_n) est décroissante donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\iff u_{n+1} + u_n \leq u_n + u_n \\ &\iff \frac{1}{n} \leq 2u_n \end{aligned}$$

De même, en écrivant l'égalité de la question 4 pour $n - 1$ on a $u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}$ et

$$\begin{aligned} u_n \leq u_{n-1} &\iff u_n + u_n \leq u_{n-1} + u_n \\ &\iff 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. En utilisant l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1} \iff \frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$. En utilisant encore une fois le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice 3

On note $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. La fonction $x \rightarrow x \ln(x) \neq 0$ est dérivable en tant que produit de fonction dérivable sur $]1, +\infty[$ et ne s'annule pas. donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(x \ln(x))^2} < 0$$

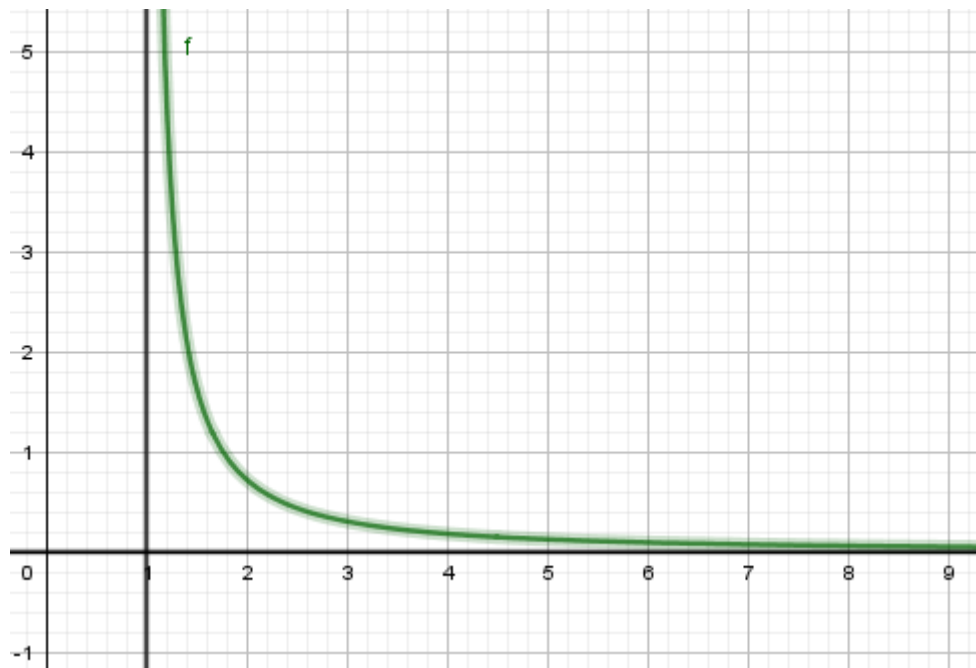
car $\ln(x) > \ln(1)$ donc $f' < 0$ et f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0.$$

Il y a une asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln(x)} = +\infty.$$

Il y a une asymptote verticale.



2. Pour $k \geq 3$ on a $k - 1 \geq 2 > 1$ donc f est strictement décroissante sur $[k - 1, k]$ et $f(k) \leq f(x) \leq f(k - 1)$ pour tout $x \in [k - 1, k]$

Et comme $k - 1 \leq k$ alors pour tout $k \geq 3$,

$$\int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt$$

$$\iff f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$

3. (a) Pour $n \geq 3$, on somme alors ces inégalités de 3 à n .

$$\sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1)$$

On rectifie la somme de gauche :

$$\sum_{k=3}^n f(k) = \sum_{k=2}^n f(k) - f(2).$$

En utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_2^n f(x) dx$$

Et en utilisant un changement de variable :

$$\sum_{k=3}^n f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = \sum_{k=2}^n f(k) - f(n)$$

d'où finalement pour tout entier $n \geq 3$ -et également pour $n = 2$ - donc pour $n \geq 2$

$$\boxed{S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}}$$

- (b) On calcule

$$\int_2^n f(x) dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

D'après l'inégalité précédente, on a

$$S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{1}{2 \ln(2)} \quad \text{et} \quad \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)} \leq S_n$$

d'où les deux inégalités :

$$\boxed{\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}$$

- (c) En divisant de part et d'autres par $\ln(\ln(n)) > 0$ on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2 \ln(2) \ln(\ln(n))}$$

et par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. Pour montrer que ces suites sont adjacentes, il faut montrer que l'une est décroissante, l'autre croissante et la différence tend vers 0 :

— On calcule

$$v_n - u_n = S_n - \ln(\ln(n)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$$

et comme $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ alors

$$\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$$

— Pour la suite u :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+2)) - S_n + \ln(\ln(n+1)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_{n+1}^{n+2} = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de la question 2 pour $k = n + 2$.

La suite (u_n) est donc croissante.

— et de même pour la suite v :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - \ln(\ln(n+1)) - S_n + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - [\ln(\ln(x))]_n^{n+1} = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles ont donc une limite commune ℓ .

5. (a) Comme la suite (v_n) est décroissante et (u_n) croissante, on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ et en retranchant v_n on obtient $u_n - v_n \leq \ell - v_n \leq 0$ avec $v_n - u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$ d'après l'inégalité de la question 2 pour $k = n + 1$ d'où

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

(b) On a alors v_n qui donne une valeur approchée de ℓ à $\frac{1}{n \ln(n)}$ près.

Il faut donc calculer la somme S_n jusqu'à ce que $\frac{1}{n \ln(n)}$ soit inférieur à 10^{-2} :

```
n= 2
while 1/(n*log(n)) > 10^{-2} do
    n = n+1
end
S = 0
for k = 2 : n
    S = S + 1/(k*log(k))
end
v = S - log(log(n))
disp(v)
```

On peut également calculer

```
n= 2
S = 0
while 1/(n*log(n)) > 10^{-2} do
    n = n+1
    S = S + 1/(n*log(n))
end
v = S - log(log(n))
disp(v)
```